

Stima & Identificazione

Esercitazione del 31 Maggio 2010

Problema 1 - Si consideri il sistema

$$\begin{cases} x_1(t+1) &= \frac{1}{2} x_1(t) + x_2(t) + u(t) \\ x_2(t+1) &= \frac{1}{2} x_2(t) + w(t) \end{cases}$$

dove $w(t) \sim wn(0, 1)$ e $u(t)$ è un ingresso deterministico.

(a) Dire se il processo stocastico $x(t) = [x_1(t), x_2(t)]'$ è, a regime, stazionario.

(b) Assumendo un ingresso deterministico costante $u(t) \equiv 2$, determinare la regione di confidenza al 90% asintotica (a regime) del vettore $x(t)$.

Problema 2 - Determinare il predittore ottimo ad un passo e la varianza dell'errore di predizione per il processo stocastico $y(t)$ definito dal seguente modello

$$\begin{aligned} w(t) &= e(t) + \frac{4}{5} e(t-1) \\ x(t) &= w(t) + v(t) \\ y(t) + \frac{3}{5} y(t-1) &= x(t) \end{aligned}$$

dove $e(t)$ ed $v(t)$ sono rumori bianchi a media nulla, fra loro incorrelati, e di varianze $var(e) = \sigma_e^2 = 75$ e $var(v) = \sigma_v^2 = 7$.

Problema 3 - Dato il processo y_t definito dalla seguente equazione alle differenze:

$$y_t - \frac{1}{2} y_{t-5} = e_t + \frac{1}{3} e_{t-2}, \quad e_t \sim wn(0, 1)$$

determinarne:

(a) la densità spettrale;

(b) le equazioni di Yule-Walker;

(c) i predittori ottimi, a MMSE, a $T=1,2,3$ passi ed i relativi rendimenti.

Problema 4 - Si consideri il sistema:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w_t \\ y_t &= [1, 0] x_t + v_t \end{aligned}$$

con $w_t \sim wn(0, 1)$ e $v_t \sim wn(0, r)$, $r > 0$. Determinare il predittore ottimo stazionario di Kalman e la relativa varianza dell'errore di predizione, confrontando il valore ottenuto con quello relativo all'osservatore deadbeat.